того же вида. На языке нашей современной символики теорему эту можно выразить следующим образом:

$$\lim \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0, \quad \text{если} \ \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lesseqgtr \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим доказательство путем исчерпывания в его первом приложении у Эвклида (XII, 2), который им пользуется для установления того, что площади двух кругов пропорциональны квадратам их диаметров. В предшествующей этому теореме 1 доказывается, что площади подобных вписанных многоугольников пропорциональны квадратам диаметров соответствующих окружностей; довольствуясь краткой формулировкой, мы можем сказать, что доказательство теоремы 2 основывается на рассмотрении окружностей, как пределов этих многоугольников.

Правомерность этого перехода к *пределу* обеспечивается доказательством путем исчерпывания, а применение для этого X, 1 (имеющее место лишь в самом доказательстве) имеет целью показать в этом случае, что в окружность можно вписать многоугольник с таким числом сторон, что разность между ним и кругом может быть сделана меньше любого заданного предела; действительно, при удвоении числа сторон многоугольника мы получаем вписанные в сегменты круга треугольники; треугольники эти, дающие названную разность, равны половине прямоугольников, объемлющих эти сегменты, и, следовательно, сами больше половины сегментов.

Теперь, чтобы доказать, что если A и B — круги, а a и b их радиусы, то:

$$A : B = a^2 : b^2,$$

допускают, что:

$$a^2 : b^2 = A : C$$

и для проверки возможности того, что $C < B$, вписывают в A и B правильные подобные многоугольники A', B', с числом сторон, достаточно большим, чтобы $B - B' < B - C$, т. е. чтобы $B' > C$. В таком случае мы должны иметь:

$$a^2 : b^2 = A : C = A' : B';$$

но это невозможно, ибо $A > A'$, но $C < B'$; случай, когда $C > B$, сводится к предыдущему, ибо из $C > B$ можно вывести, что

$$b^2 : a^2 = C : A = B : D,$$

где:

$$D < A.$$

Ясно, что если переменные величины A' и B' имеют предельные значения A и B и если отношение $A' : B'$ обладает постоянным значением, то тот же самый прием можно всегда применить для доказательства того, что отношение $A : B$ обладает тем же значением; в частности, если $A' = B'$, то $A = B$. Однако древние не устанавливают раз навсегда этого положения, как это сделали